

О РАЗРЕШИМОСТИ И СПЕЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕЛЛЯ

Осипов Н. Н.¹, доктор физ.-мат. наук, профессор, ✉ nosipov@sfu-kras.ru,
orcid.org/0000-0002-8894-609X

Орлов Н. В.², студент, nikita.orlov@math.msu.ru

Орлова И. Н.³, канд. физ.-мат. наук, доцент, orlhome@rambler.ru,
[oorcid.org/0000-0002-8638-3879](https://orcid.org/0000-0002-8638-3879)

¹Сибирский федеральный университет, пр. Свободный, д. 79, 660041, Красноярск, Россия

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, 119991, Москва, Россия

³Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева,
ул. Ады Лебедевой, д. 89, 660049, Красноярск, Россия

Аннотация

В работе исследовалось семейство решений параметрических уравнений Пелля второго порядка общего вида: $x^2 - mxy + y^2 = B$, где m и B — некоторые параметры. Найден оптимальный алгоритм решения подобных уравнений как альтернатива традиционному методу. Предложенный метод позволяет не только решать уравнения подобного вида при конкретных значениях параметров m и B , но и исследовать некоторые уравнения данного класса на разрешимость в целом. В частном случае уравнений специального вида выявлены последовательности натуральных чисел — параметров уравнения, при которых оно тотально неразрешимо.

Ключевые слова: диофантовы уравнения, уравнение Пелля.

Цитирование: Осипов Н. Н., Орлов Н. В., Орлова И. Н. О разрешимости и специальных решениях параметрических уравнений Пелля // Компьютерные инструменты в образовании. 2024. № 4. С. 7–23. doi:10.32603/2071-2340-2024-4-7-23

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная теория чисел является одним из самых динамично развивающихся и востребованных разделов чистой математики. Ее методы и результаты широко используются в криптографии, вычислительной и прикладной математике, информатике. Одновременно с этим диофантовы уравнения высших порядков — один из динамично развивающихся разделов теории чисел [1–5].

Пристальный интерес вызывают диофантовы уравнения двух переменных. Поиск оптимальных решений уравнений этого класса является по-прежнему актуальной задачей. При этом требуется разработка особых методов в комплексе с численными расчетами [6, 7]. Решение диофантовых уравнений второй степени часто сопряжено с серьезными трудностями [8]. Классическим примером таких уравнений является известное уравнение Пелля [6]:

$$x^2 - Ay^2 = 1.$$

Здесь A — натуральное число, не являющееся точным квадратом. Общий метод решения семейства таких уравнений, в дальнейшем названный «циклическим методом», впервые был описан индийским математиком VII века Брахмагуптой. Оказалось, что в случае наличия у такого уравнения нетривиальных решений (сюда входят все пары (x, y) , отличные от $(\pm 1, 0)$) данное уравнение имеет бесконечно много решений, которые по определенному алгоритму можно построить из наименьшего решения. В силу такого «порождающего» свойства наименьшего решения его можно назвать *базисным*. Свойства решения классических уравнений Пелля подробно изложены в [9].

Представляет интерес решение уравнений Пелля в общем виде, где в правой части находится не единица, а некоторое целое число $B \neq 0$:

$$x^2 - Ay^2 = B.$$

Если A и B зависят от некоторого целочисленного параметра m , то такое уравнение называется параметрическим уравнением Пелля. Для его решения также существует общий метод [10, 11].

В данной работе рассматривается решение параметрических уравнений вида:

$$x^2 - mxy + y^2 = B, \quad (1)$$

где $B \neq 0$ и $m \geq 3$. Одним из вариантов решения подобных уравнений как раз является сведение к параметрическому уравнению Пелля путём выделения полных квадратов в левой части. Таким образом, для данного класса уравнений можно обобщить понятие базисного решения по аналогии с уравнениями Пелля. Однако этот путь не является рациональным [11].

Для поиска оптимального алгоритма решения диофантова уравнения (1) поставлены следующие задачи:

1. Описать базисные решения данного уравнения и способ получения из них всех решений в виде конечного числа бесконечных серий.
2. Исследовать возможные случаи тотальной неразрешимости уравнений данного класса при помощи предложенного метода решения.

2. ОПИСАНИЕ БАЗИСНЫХ РЕШЕНИЙ

Суть метода, предложенного в настоящей работе, можно сформулировать в форме теоремы.

Теорема 1.

Если у уравнения (1) есть решения, то их бесконечное множество.

Пусть $\varepsilon = (m + \sqrt{m^2 - 4})/2$ и $\alpha_k = x_k - y_k \varepsilon$, где (x_k, y_k) — некоторая пара решений ($k \in \mathbb{Z}$). Тогда:

$$\alpha_k = \pm \alpha_0 \varepsilon^k, \quad \alpha_0 = x_0 - y_0 \varepsilon,$$

где x_0 и y_0 описываются следующими условиями:

если $B > 0$, то

$$-\sqrt{\frac{B}{m+2}} < y_0 \leq \sqrt{\frac{B}{m+2}}, \quad x_0 = \frac{my_0 + \sqrt{y_0^2(m^2 - 4) + 4B}}{2};$$

если $B < 0$, то

$$-\sqrt{\frac{|B|}{m-2}} < y_0 \leq -\sqrt{\frac{4|B|}{m^2-4}}, \quad x_0 = x_{1,2} = \frac{my_0 \pm \sqrt{y_0^2(m^2-4) + 4B}}{2}, \quad (2)$$

или:

$$y_0 = -\sqrt{\frac{|B|}{m-2}}, \quad x_0 = \frac{my_0 - \sqrt{y_0^2(m^2-4) + 4B}}{2}.$$

Доказательство:

Сделаем несколько предварительных замечаний.

1. Рассмотрим числовое множество

$$\mathbb{Z}[\varepsilon] = \{x - y\varepsilon : (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Поскольку вещественное число ε является иррациональным при $m \geq 3$ (легкое упражнение для читателя), вещественное число $\alpha = x - y\varepsilon$ однозначно определяется парой целых чисел (x, y) . Из равенств

$$\begin{aligned} (x_1 - y_1\varepsilon) \pm (x_2 - y_2\varepsilon) &= (x_1 \pm x_2) - (y_1 \pm y_2)\varepsilon, \\ (x_1 - y_1\varepsilon)(x_2 - y_2\varepsilon) &= x_1x_2 - y_1y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1 - my_1y_2)\varepsilon \end{aligned}$$

следует, что $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ — кольцо, содержащее единицу $1 = 1 - 0 \cdot \varepsilon$. Более того, $\varepsilon = 0 - (-1) \cdot \varepsilon$ является обратимым элементом этого кольца, так как

$$\varepsilon^{-1} = \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} \right)^{-1} = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2} = m - \varepsilon \in \mathbb{Z}[\varepsilon]. \quad (3)$$

В частности, для любых $\alpha \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$ и $k \in \mathbb{Z}$ имеем $\alpha/\varepsilon^k \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$.

2. Для произвольного $\alpha = x - y\varepsilon \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$ положим

$$N(\alpha) = x^2 - mxy + y^2 = (x - y\varepsilon)(x - y\varepsilon^{-1}) = \alpha\alpha',$$

где $\alpha' = x - y\varepsilon^{-1}$ — число, сопряженное с числом α . Число $N(\alpha)$ является целым и называется нормой числа α . Уравнение (1) нам будет удобно записать в виде

$$N(\alpha) = B, \quad (4)$$

где в роли неизвестного теперь будет число $\alpha = x - y\varepsilon \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$.

3. Нетрудно проверить, что норма мультипликативна: для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$ имеет место равенство

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta).$$

Заметим, что $N(\varepsilon) = 1$. Из мультипликативности нормы следует, что

$$N(\alpha/\varepsilon^k) = N(\alpha)$$

для любых $\alpha \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$ и $k \in \mathbb{Z}$. Другими словами, если взять произвольное решение уравнения (4) и поделить (умножить) его на произвольную степень ε с целым показателем, то получим еще одно решение уравнения (4).

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Заменяя α на $-\alpha$ при необходимости, мы далее будем считать $\alpha > 0$. Пусть $q > 0$ — произвольное фиксированное вещественное число. Для любого решения $\alpha > 0$ уравнения (4) существует единственное $k \in \mathbb{Z}$, такое что число $\alpha_0 = \alpha/\varepsilon^k$ попадает в полуинтервал

$$q \leq \alpha_0 < q\varepsilon. \quad (5)$$

Это происходит потому, что точки $q\varepsilon^k$, где $k \in \mathbb{Z}$, разбивают положительный луч на полуинтервалы вида $[q\varepsilon^k, q\varepsilon^{k+1})$, и наше решение $\alpha > 0$ находится ровно в одном из них. Более того, $\alpha_0 \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$ (см. п. 1) и α_0 также является решением уравнения (4) (см. п. 3).

Важное наблюдение состоит в том, что решений α_0 уравнения (4), удовлетворяющих условию (5), существует не более, чем конечное множество (такие решения мы далее будем называть *базисными*). Действительно, если $\alpha_0 = x_0 - y_0\varepsilon$ — такое решение, то $N(\alpha_0) = \alpha_0\alpha'_0 = B$, откуда находим

$$\alpha'_0 = x_0 - y_0\varepsilon^{-1} = \frac{B}{\alpha_0}$$

и далее

$$y_0 = -\frac{\alpha_0 - \alpha'_0}{\varepsilon - \varepsilon^{-1}} = -\frac{\alpha_0 - B/\alpha_0}{\varepsilon - \varepsilon^{-1}} =: f(\alpha_0). \quad (6)$$

При условии (5) функция $f(\alpha_0)$ в силу непрерывности принимает значения в некотором ограниченном промежутке, который, следовательно, содержит лишь конечное множество целых значений y_0 . Осталось заметить, что для каждого фиксированного значения y_0 существует не более двух значений x_0 (при фиксированном y_0 уравнение (1) является квадратным относительно x).

Таким образом, каждое решение $\alpha > 0$ уравнения (4) допускает запись в виде $\alpha = \alpha_0\varepsilon^k$, где α_0 — некоторое базисное решение, а $k \in \mathbb{Z}$. Если же говорить о произвольном решении α уравнения (4), то нужно еще учесть его знак:

$$\alpha = \pm \alpha_0\varepsilon^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

где α_0 — одно из базисных решений, то есть удовлетворяющих условию (5). При фиксированном α_0 множество решений (7) будем называть *серией решений*. Каждое решение α в серии (7) однозначно характеризуется своим номером k , а также знаком. Отметим, что разные серии решений (7) (то есть соответствующие разным базисным решениям α_0) не пересекаются: если, например, $\alpha_0\varepsilon^k = \alpha_0^*\varepsilon^l$, где $\alpha_0 \neq \alpha_0^*$ — базисные решения, и при этом $k > l$, то

$$\alpha_0^* = \alpha_0\varepsilon^{k-l} \geq \alpha_0\varepsilon \geq q\varepsilon,$$

что противоречит базисности решения α_0^* .

Возможен случай, когда базисных решений α_0 не существует: это в точности тот случай, когда уравнение (4) (а вместе с ним, и наше исходное уравнение (1)) неразрешимо. Если же базисные решения есть, то множество всех решений уравнения (4) представляет собой объединение серий решений вида (7) по всем базисным решениям α_0 .

Понятно, что условие базисности (5) зависит от взятого числа $q > 0$, которое имеет смысл выбрать так, чтобы поиск базисных решений, сводящийся к перебору всех целых значений y_0 в соответствующем промежутке, был наиболее коротким. Далее нашей целью будет указать оптимальное значение q , а также привести явные границы для компоненты y_0 базисных решений $\alpha_0 = x_0 - y_0\varepsilon$ в случае этого оптимального значения q .

Определим такое q , при котором множество значений функции $f(\alpha_0)$ на выбранном промежутке имеет наименьший диаметр. Минимизируем данный интервал, для того чтобы в дальнейшем совершить полный перебор всех целых чисел, лежащих в его пределах. Эти числа и есть все возможные кандидаты на роль y -компоненты базисного решения.

Из $m \geq 3$ следует: $\varepsilon \geq (3 + \sqrt{5})/2 > 1$, $\varepsilon/(\varepsilon^2 - 1) > 0$. Следовательно, коэффициент перед α_0 в функции $f(\alpha_0)$ всегда отрицателен, а знак коэффициента перед $1/\alpha_0$ совпадает со знаком B . Таким образом, возникают две разновидности функции $f(\alpha_0)$ в зависимости от знака B , графики которых представлены на рисунках 1, 2.

Рассмотрим далее эти случаи по отдельности и установим конкретные границы перебора y_0 .

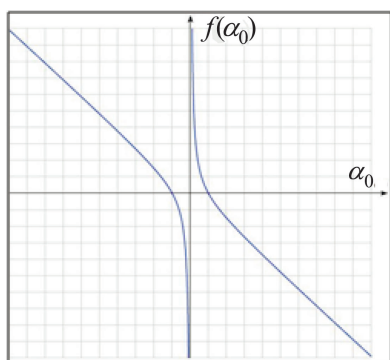


Рис. 1. Функция $f(\alpha_0)$ для случая $B > 0$.

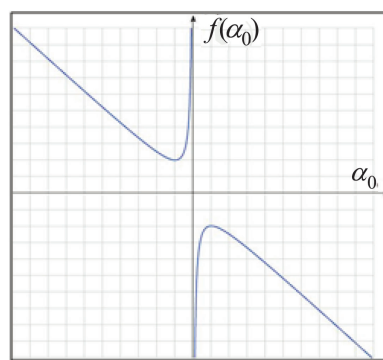


Рис. 2. Функция $f(\alpha_0)$ для случая $B < 0$.

Случай $B > 0$

В этом случае функция $f(\alpha_0)$ является монотонно убывающей, поэтому правой границей перебора будет $f(q)$, левой — $f(q\varepsilon)$. С учетом (6) составим явное выражение для длины интервала перебора как функции от q :

$$L(q) = f(q) - f(q\varepsilon) = q \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} + \frac{B}{q(\varepsilon + 1)}. \quad (8)$$

Коэффициенты перед q и перед $1/q$ в выражении (8) положительны, следовательно, график функции $L(q)$ будет иметь вид, показанный на рисунке 3.

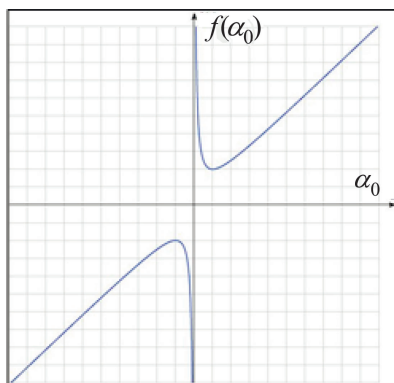


Рис. 3. Функция $f(\alpha_0)$ для случая $B < 0$.

Как видно из рисунка 3, существует значение q ($q > 0$), при котором длина интервала перебора будет наименьшей. Это соответствует экстремуму функции (8): $q = \sqrt{B/\varepsilon}$. Подстановка найденного экстремального значения q в (6) позволяет определить границы перебора:

$$f(q) = \frac{-\sqrt{B\varepsilon}}{\varepsilon^2 - 1} + \frac{\varepsilon\sqrt{B\varepsilon}}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{\sqrt{B\varepsilon}}{\varepsilon + 1}. \quad (9)$$

$$f(q\varepsilon) = \frac{-\varepsilon\sqrt{B\varepsilon}}{\varepsilon^2 - 1} + \frac{\sqrt{B\varepsilon}}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{-\sqrt{B\varepsilon}}{\varepsilon^2 - 1} = -f(q). \quad (10)$$

После подстановки (3) в (9) и (10) получим:

$$f(q) = -f(q\varepsilon) = \sqrt{\frac{B}{m+2}}.$$

Очевидно, что нижней границей является $-\sqrt{B/(m+2)}$ в силу ее отрицательности.

Случай $B < 0$

В данном случае, как видно из рисунка 2, у функции $f(\alpha_0)$ имеется экстремум.

$$\alpha_1 = \sqrt{-B}.$$

При этом значение функции (6) принимает вид:

$$f(\sqrt{-B}) = \frac{-2\varepsilon\sqrt{-B}}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Рассмотрим три случая: а) $\sqrt{-B} \leq q < q\varepsilon$, б) $q < q\varepsilon \leq \sqrt{-B}$ и в) $q < \sqrt{-B} < q\varepsilon$. В случаях а) и б) длина интервала перебора будет иметь вид, как и при $B > 0$, так как экстремум функции f не попадет в данный интервал. Однако из-за $B < 0$ график функции длины перебора L будет иметь вид, подобный графику на рисунке 1 (с точностью до отражения относительно оси Ox). Соответственно, интервал будет изменяться монотонно, и искомое значение q совпадет с $\sqrt{-B}$. В результате границы в случаях а) и б) получатся такие же, как в случае в).

Вследствие этого особо интересен случай в), когда q и $q\varepsilon$ находятся по разные стороны от $\sqrt{-B}$. При этом, нижней границей будет значение $f(\sqrt{-B})$, а верхней $f(q)$ или $f(q\varepsilon)$ (в зависимости от того, что больше). В силу того, что интервал от $f(\sqrt{-B})$ до $f(q\varepsilon)$ возрастет при убывании интервала от $f(\sqrt{-B})$ до $f(q)$ (верно и наоборот), наименьший интервал будет именно тогда, когда $f(q) = f(q\varepsilon)$. Найдем q , при котором выполняется это условие:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}q + \frac{B\varepsilon}{q(\varepsilon^2 - 1)} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}q\varepsilon + \frac{B\varepsilon}{q\varepsilon(\varepsilon^2 - 1)}.$$

Отсюда:

$$q = \sqrt{\frac{-B}{\varepsilon}}.$$

Тогда для явного вида $f(q)$ получим:

$$f(q) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \left(\frac{B}{q} - q \right) = \frac{-\sqrt{-B\varepsilon}}{\varepsilon - 1}.$$

После подстановки (3) в данное выражение получим:

$$f(q) = \frac{-\sqrt{-B\varepsilon}}{\varepsilon - 1} = -\sqrt{\frac{|B|}{m-2}}, \quad (11)$$

$$f(\sqrt{-B}) = \frac{-2\varepsilon\sqrt{-B}}{\varepsilon^2 - 1} = -\sqrt{\frac{4|B|}{m^2 - 4}}, \quad (12)$$

поскольку $B < 0, -B = |B|$.

Выясним, какая из границ (11) или (12) является верхней, а какая нижней. После расчета их модулей получим:

$$-\sqrt{\frac{4|B|}{m^2 - 4}} > -\sqrt{\frac{|B|}{m-2}}.$$

Таким образом, получен алгоритм, позволяющий, произведя полный перебор в определенных пределах и решить уравнение (1) при заданных m и B . Следует заметить, что на каждую y -компоненту базисного решения приходятся две x -компоненты. В этом нетрудно убедиться, выразив x через y из первоначального уравнения (2).

Удостоверимся, что оба значения x_1 и x_2 из (2) действительно являются компонентами именно базисного решения. С этой целью проведем анализ случаев $B > 0$ и $B < 0$ по отдельности.

Рассмотрим случай $B > 0$. Выразим x_0 через B, ε и α_0 подобно тому, как это было сделано для y_0 :

$$x_0 = \frac{B}{2\alpha_0} + \frac{\alpha_0}{2} + \frac{y_0}{2} \left(\frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon} \right). \quad (13)$$

После подстановки в (13) выражения для y_0 из (6) получим:

$$x_0 = -\frac{\alpha_0}{\varepsilon^2 - 1} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} \frac{B}{\alpha_0} = g(\alpha_0). \quad (14)$$

Так как $\varepsilon^2/(\varepsilon^2 - 1) > 0$ и $1/(\varepsilon^2 - 1) < 0$, график функции $g(\alpha_0)$ подобен графику на рисунке 1. Следовательно, данная функция монотонно убывает. Поскольку $g(\alpha_0)$ монотонно убывает, при всех $\alpha_0 < \sqrt{B\varepsilon}$ соответствующая x -компонента будет меньше, чем при $\alpha_0 = \sqrt{B\varepsilon}$. Найдем это минимальное значение x :

$$x_{\min} = g(\sqrt{B\varepsilon}) = \frac{\sqrt{B\varepsilon}}{\varepsilon + 1} > 0.$$

Таким образом, минимальное значение x положительно, а значит, и все возможные базисные x положительны.

Для уравнения (1) с помощью формулы Виета будем иметь:

$$x_1 x_2 = y^2 - B. \quad (15)$$

Подставим в выражение (15) крайнее значение для y , равное $\sqrt{B/(m+2)}$. Таким образом, мы найдем наибольшее значение $x_1 x_2$:

$$[x_1 x_2]_{\max} = \frac{B}{m+2} - B = -B \left(\frac{m+1}{m+2} \right) < 0.$$

Поскольку максимальное значение данного произведения оказалось отрицательным, все возможные его значения также отрицательны. Соответственно, ровно одно из

значений x_1 или x_2 положительно, а другое — отрицательно. Очевидно, что

$$x_1 = \frac{my + \sqrt{y^2(m^2 - 4) + 4B}}{2} > 0, \quad x_2 = \frac{my - \sqrt{y^2(m^2 - 4) + 4B}}{2} < 0. \quad (16)$$

Ранее мы доказали, что для удовлетворения условия базисности необходимо $x_0 > 0$. Таким образом, на роль x -компоненты базисного решения подходит только x_1 . Более того, дополнительных проверок производить не нужно, так как в ином случае исходное уравнение было бы в принципе неразрешимо при любых значениях параметров.

Рассмотрим случай $B < 0$. В данном случае функция $g(\alpha_0)$ имеет экстремум, который определим из (14):

$$\alpha_{0\text{ext}} = \varepsilon \sqrt{-B}, \quad x_{\text{max}} = g(\alpha_{0\text{ext}}) = \frac{-2\varepsilon \sqrt{-B}}{\varepsilon^2 - 1} < 0.$$

Это наибольшее значение x -компоненты базисного решения.

В силу того, что $\sqrt{-B}/\varepsilon < \sqrt{-B\varepsilon} < \varepsilon \sqrt{-B}$, все значения α_0 , удовлетворяющие условию базисности, находятся на одном промежутке монотонности функции g (на нем данная функция монотонно возрастает). Каждому α_0 соответствует единственное значение x . Вместе с тем, при условии принадлежности α_0 данному интервалу зависимость $y = f(\alpha_0)$ не является монотонной и имеет максимум $y_{\text{max}} = f(\sqrt{-B}) = -\sqrt{-4B/(m^2 - 4)}$, а значения на краях интервала равны $(f(\sqrt{-B/\varepsilon}) = f(\sqrt{-B\varepsilon}) = -\sqrt{-B/(m-2)})$. Отсюда следует, что всем значениям y , кроме верхней границы перебора, равной $f(\sqrt{-B})$ ($x_1 = x_2$), соответствуют два значения α_0 , а в силу монотонности функции $g(\alpha_0)$ и два различных значения x_0 .

Поскольку имеются всего два допустимых кандидата на роль x_0 (16), именно они и являются x -компонентами двух независимых базисных решений нашего уравнения.

Однако есть и особый случай. Для $y = -\sqrt{-B/(m-2)}$ имеем два значения x_0 : $g(\sqrt{-B/\varepsilon})$ и $g(\sqrt{-B\varepsilon})$. Но значение $\alpha_0 = \sqrt{-B\varepsilon}$ в интервал базисности не входит, соответственно, $x_0 = g(\sqrt{-B\varepsilon})$ необходимо отбросить. Поскольку $\sqrt{-B\varepsilon} > \sqrt{-B/\varepsilon}$ и функция $g(\alpha_0)$ на промежутке базисности возрастает, подходит на роль x -компоненты базисного решения меньшее значение x_0 , то есть $x_2 = (my - \sqrt{y^2(m^2 - 4) + 4B})/2$.

Теорема 1 доказана.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

В случае, когда правая часть уравнения (1) выражается некоторой функцией $B = B(m)$, удобно использовать некоторые его специальные решения, существование которых гарантирует разрешимость исходного уравнения.

Рассмотрим случай $B > 0$. Если уравнение разрешимо, то, согласно теореме 1, существует некоторое решение (x_1, y_1) , такое, что

$$0 \leq y_1 \leq \sqrt{\frac{B}{m+2}}, \quad x_1 = \frac{my_1 - \sqrt{(m^2 - 4)y_1^2 + 4B}}{2}. \quad (17)$$

Данная пара не является базисной, тем не менее, она разрешает уравнение. Поскольку $y_1 \leq \sqrt{B/(m+2)} < \sqrt{B}$, $my_1 < \sqrt{(m^2 - 4)y_1^2 + 4B}$, и, соответственно, $x_1 < 0$, то $x_1 y_1 \leq 0$.

Докажем, что

$$-x_1 y_1 = \frac{y_1 \left(\sqrt{(m^2 - 4)y_1^2 + 4B - m y_1} \right)}{2} \leq \frac{B}{m + 2}. \quad (18)$$

Пусть $t = y_1 / \sqrt{B}$, $t \in [0; 1 / \sqrt{m + 2}]$. С учетом введенной переменной t обозначим левую часть некоторой функцией $Bf(t)$. В результате имеем:

$$-x_1 y_1 = Bf(t) = B \frac{t \left(\sqrt{(m^2 - 4)t^2 + 4 - mt} \right)}{2} \leq \frac{B}{m + 2}. \quad (19)$$

Таким образом мы исключили переменную B :

$$f(t) = \frac{t \left(\sqrt{(m^2 - 4)t^2 + 4 - mt} \right)}{2} \leq \frac{1}{m + 2}. \quad (20)$$

Экстремум функции (20) найдем из уравнения:

$$f'(t) = -mt + \frac{(m^2 - 4)t^2 + 2}{\sqrt{(m^2 - 4)t^2 + 4}} = 0. \quad (21)$$

Решением данного уравнения является $t^* = 1 / \sqrt{m + 2}$, что совпадает с правой границей взятого нами промежутка для t . Следовательно, весь выбранный нами промежуток находится на одном отрезке монотонности функции $f(t)$. Этому же отрезку принадлежит и $f(0)$, в этой точке производная существует, соответственно, мы можем воспользоваться этой точкой для поиска знака производной на искомом интервале (из (21)): $f'(0) = 1 > 0$.

Таким образом, функция на искомом промежутке является возрастающей. Значит, она достигает максимального значения при $t = t^* = 1 / \sqrt{m + 2}$. Найдем это значение:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{m + 2}}\right) = \frac{1}{m + 2}. \quad (22)$$

Таким образом, неравенство (18) доказано.

Аналогичную пару специальных решений можно построить для случая $B < 0$. В этом случае необходимо задать:

$$\sqrt{\frac{4|B|}{m^2 - 4}} \leq y_1 \leq \sqrt{\frac{|B|}{m - 2}}, \quad x_1 = \frac{m y_1 - \sqrt{(m^2 - 4)y_1^2 - 4|B|}}{2} > 0.$$

После рассуждений, аналогичных (17)–(22), получим:

$$\frac{|B|}{m - 2} \leq x_1 y_1 \leq \frac{2m|B|}{m^2 - 4}.$$

4. ТОТАЛЬНО НЕРАЗРЕШИМЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Применим разработанный метод для некоторых частных случаев. Рассмотрим семейство параметрических уравнений (1), правая часть которых представляется в виде:

$$B = \pm (m^2 + k). \quad (23)$$

здесь $m, k \geq 1$.

Зададимся целью найти условие на параметр k , при выполнении которого уравнение (1) будет неразрешимо при любых допустимых m . Такое параметрическое уравнение далее будем называть тотально неразрешимым.

Случай $B = m^2 + k$, ($B > 0$)

Пусть $k \equiv 2 \pmod{4}$. Очевидно, уравнение неразрешимо при $m = 1$ и $m = 2$. Следовательно, наименьшее рассматриваемое m равно 3. Пусть m_1 — наименьшее m , при котором уравнение разрешимо. Тогда, согласно теореме 1, существует специальное решение (x_1, y_1) :

$$x_1 < 0, \quad y_1 \geq 0, \quad -x_1 y_1 \leq \frac{B}{m_1 + 2} = \frac{m_1^2 + k}{m_1 + 2}. \quad (24)$$

Случай $y_1 = 0$ можно исключить из рассмотрения, поскольку при нем имеем $x_1^2 = m_1^2 + k$, то есть разность двух квадратов чисел оказалась равна k , но, поскольку $k \equiv 2 \pmod{4}$, это невозможно. Следовательно, $y_1 > 0$.

Пусть $m_2 = m_1 + x_1 y_1$. Заметим, что если предположение (24) верно, то уравнение

$$x^2 - m_2 x y + y^2 = m_2^2 + k \quad (25)$$

имеет решение $(-x_1; y_1)$, что легко проверить подстановкой в (25).

Таким образом, разрешимость уравнения при некотором наименьшем $m = m_1$ гарантирует его разрешимость при $m = m_2$. Следовательно, для того чтобы уравнение было неразрешимо, нам необходимо противоречие между этими фактами. Это возможно при $0 < m_2 < m_1$, то есть m_1 не является наименьшим из допустимых m , при которых уравнение имеет решение, оставаясь положительным. Условие $m_2 < m_1$ очевидно, поскольку $m_2 = m_1 + x_1 y_1$ и $x_1 y_1 < 0$.

Для выполнения условия $m_2 > 0$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство $(m_1^2 + k) / (m_1 + 2) < m_1$ (в силу $-x_1 y_1 \leq (m_1^2 + k) / (m_1 + 2)$). Из этого неравенства получаем $m_1 > k/2$. Таким образом, доказано утверждение: если для некоторого k уравнение неразрешимо при всех $m \in [1; k/2]$, то и для всех остальных m оно также будет неразрешимо.

Данное утверждение можно считать искомым условием на параметр k . Это условие сводит поиск конкретного значения параметра k к процедуре конечного перебора m , которое можно реализовать с помощью компьютера.

Уравнение (1) с учетом (23) также неразрешимо и при особых малых значениях k : $k = 1$ и $k = 4$. В остальных случаях уравнение (1) будет разрешимо при бесконечном наборе $m \geq 1$. Для демонстрации этого приведем характерный график уравнения $x^2 - m x y + y^2 = m^2 + k$, которым является гипербола (см. рис. 4).

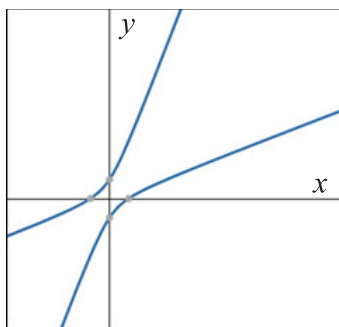


Рис. 4. Характерная зависимость $y(x)$

Как видно из рисунка 4, асимптоты искомой гиперболы находятся в I и III координатных четвертях. Поскольку базисное решение «генерирует» бесконечный ряд всё больших и больших по величине пар значений переменных, разрешающих уравнение, среди них обязательно найдется пара с натуральными значениями x и y .

Положим, как и ранее: $m_2 = m_1 + x_1 y_1$. В силу натуральности пары (x, y) $m_2 > m_1$. Как ранее доказано, при $m = m_2$ наше уравнение имеет целочисленное решение $(-x_1; y_1)$, следовательно, имеется и пара натуральных чисел $(x_2; y_2)$.

Аналогичные рассуждения можно провести, если положить $m_3 = m_2 + x_2 y_2$ с учетом $m_3 > m_2$. Таким образом, разрешимость уравнения при некотором значении m позволяет нам по алгоритму построить бесконечную цепочку значений m , при которых уравнение будет разрешимо, причём каждое последующее m в нашей цепочке будет больше предыдущего.

Из рассуждений выше видно, что при всех k , не прошедших «проверку» представленным методом, найдется такое m , при котором уравнение разрешимо. Таким образом, искомое утверждение доказано. Данный результат разумно оформить в виде теоремы (Теорема 2), ее формулировка приведена ниже. Там же приведен ряд значений k , при котором уравнение Пелля тотально неразрешимо.

Случай $B = -(m^2 + k)$, ($B < 0$)

В этом случае уравнение (1) принимает вид:

$$x^2 - mxy + y^2 = -m^2 - k. \quad (26)$$

При $k \equiv 1 \pmod{4}$ и $k \equiv \pm 3 \pmod{9}$ уравнение (26) неразрешимо по соответствующему модулю, следовательно, данные k можно далее не рассматривать. Также это уравнение неразрешимо при $m = 1$ и $m = 2$.

Пусть $m_1 \geq 3$ — наименьшее значение m , при котором уравнение разрешимо. Тогда существует специальное решение (x_1, y_1) :

$$x_1, y_1 > 0; \quad \frac{m_1^2 + k}{m_1 - 2} \leq x_1 y_1 \leq \frac{2m_1(m_1^2 + k)}{m_1^2 - 4}.$$

Поскольку $(m_1^2 + k) / (m_1 - 2) > m_1$, имеем $x_1 y_1 > m_1$. Положим $m_2 = x_1 y_1 - m_1$. В силу вышесказанного, $m_2 > 0$. Заметим, что при $m = m_2$ уравнение имеет решение (x_1, y_1) , что легко проверить подстановкой пары в (26).

Противоречие реализуется при $m_2 < m_1$, что эквивалентно неравенству $x_1 y_1 < 2m_1$. Данное неравенство справедливо при невыполнении следующей системы неравенств:

$$2m_1 \leq x_1 y_1 \leq \frac{2m_1(m_1^2 + k)}{m_1^2 - 4},$$

что следует из ограничений, наложенных на специальное решение.

Перейдем от неравенства к равенству: для этого заключим величину $x_1 y_1$ между двумя соседними натуральными числами: $2m_1 \leq x_1 y_1 < 2m_1 + 1$. Отсюда: $x_1 y_1 = 2m_1$. Для выполнения записанного условия достаточно чтобы $(2m_1(m_1^2 + k)) / (m_1^2 - 4) < 2m_1 + 1$, что выполняется при всех $m_1 \geq 2k + 9$. Оформим полученное условие в виде системы нашего равенства и исходного уравнения (1):

$$\begin{cases} x_1 y_1 = 2m_1, \\ x_1^2 - m_1 x_1 y_1 + y_1^2 = -m_1^2 - k. \end{cases} \quad (27)$$

Отсюда:

$$x_1^4 + (k - m_1^2)x_1^2 + 4m_1^2 = 0.$$

Дискриминант этого биквадратного уравнения имеет вид:

$$D = (k - m_1^2)^2 - 16m_1^2.$$

В силу $x_1 \in \mathbb{Z}$, эта величина обязана быть равной квадрату числа. Рассмотрим неравенство:

$$(m_1^2 - k - 9)^2 < D < (m_1^2 - k - 8)^2.$$

Правая часть данного неравенства путём раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых сводится к неравенству $64 + 16k > 0$, которое выполняется при любых положительных k . Левая же часть данного неравенства равносильна неравенству:

$$2m_1^2 > 18k + 81.$$

При дополнительном условии $m_1 \geq 2k + 9$ данное неравенство выполнено при любых $k > 0$, из чего можно сделать вывод, что рассматриваемое нами двойное неравенство всегда выполняется при $m_1 \geq 2k + 9$, то есть в той самой области, в которой верна исходная система равенств (27).

Таким образом, если уравнение (26) является totally неразрешимым при всех допустимых m , не попадающих в данных промежутков (то есть при $m \in [3; 2k + 8]$), то оно автоматически является таковым и при всех натуральных значениях m .

Полученное утверждение вновь можно считать искомым условием на параметр k . Как и выше, поиск k сводится к перебору значений.

Данный результат можно оформить в виде теоремы (Теорема 3). Ее формулировка, а также ряд значений k , при которых уравнение Пелля totally неразрешимо, приведены ниже.

На рисунке 5 приведена диаграмма наличия решений в целых числах при $B > 0$ на плоскости (k, m) . Точки (k, m) на диаграмме — найденные решения в целых числах, вертикальные прямые — линии totalной неразрешимости (значения k , при которых решений в целых числах нет ни при каком m). При $B < 0$ иллюстрация аналогична с верхней границей $m = 2k + 8$.

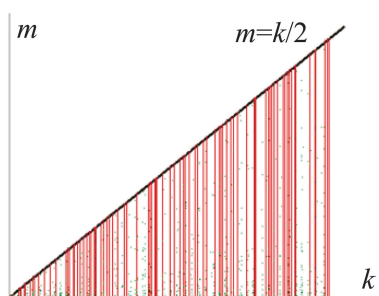


Рис. 5. Диаграмма, иллюстрирующая наличие решений в целых числах при $B > 0$: точки (k, m) — решения в целых числах, вертикальные прямые — линии totalной неразрешимости

Теорема 2 ($B > 0$).

Если для некоторого $k \equiv 2 \pmod{4}$ уравнение

$$x^2 - mxy + y^2 = m^2 + k, \quad m^2 + k = B, \quad B > 0,$$

оказалось неразрешимым для всех $m \in [1; k/2]$, то оно является totally неразрешимым. Кроме того, все k , при которых оно является таковым, удовлетворяют этому условию.

Полученное условие при $B > 0$ выполняется для следующего ряда значений k (первые $N = 86$ членов последовательности):

$k \in \{14, 94, 114, 118, 154, 158, 214, 238, 254, 294, 358, 414, 478, 574, 594, 598, 614, 654, 658, 694, 718, 758, 790, 814, 834, 862, 874, 878, 934, 958, 994, 1014, 1054, 1106, 1174, 1198, 1294, 1414, 1434, 1454, 1486, 1494, 1498, 1558, 1634, 1678, 1738, 1774, 1794, 1834, 1894, 1918, 1978, 2014, 2094, 2134, 2158, 2174, 2214, 2254, 2278, 2326, 2414, 2494, 2506, 2514, 2614, 2638, 2654, 2674, 2694, 2698, 2734, 2794, 2806, 2830, 2854, 2878, 2906, 2914, 3058, 3114, 3118, 3214, 3238, 3254, \dots\}$

Теорема 3 ($B < 0$).

Если для некоторого k , кроме $k \equiv 1 \pmod{4}$ и $k \equiv 3 \pmod{9}$, а также $k \equiv 6 \pmod{9}$, уравнение

$$x^2 - mxy + y^2 = -m^2 - k, \quad -m^2 - k = B, \quad B < 0,$$

оказалось неразрешимым для всех $m \in [3; 2k + 8]$, то оно является totally неразрешимым. Кроме того, все k , при которых оно является таковым, удовлетворяют этому условию.

В случае $B < 0$ первые $N = 160$ членов последовательности значений k , при которых рассматриваемые уравнения Пелля totally неразрешимы, выглядят следующим образом:

$k \in \{4, 8, 14, 18, 19, 26, 38, 44, 47, 54, 63, 68, 74, 79, 98, 99, 103, 110, 118, 119, 124, 126, 134, 143, 144, 154, 158, 166, 179, 180, 194, 198, 199, 206, 207, 208, 214, 215, 224, 234, 238, 239, 250, 254, 263, 274, 278, 279, 287, 299, 306, 308, 314, 319, 324, 326, 334, 342, 351, 359, 362, 368, 374, 378, 383, 404, 406, 414, 418, 423, 424, 431, 439, 450, 458, 459, 479, 488, 494, 495, 503, 504, 511, 514, 518, 524, 544, 551, 558, 566, 574, 584, 586, 594, 599, 602, 614, 628, 638, 639, 644, 648, 656, 668, 674, 679, 684, 698, 704, 718, 719, 724, 734, 738, 747, 754, 756, 758, 767, 774, 782, 783, 791, 794, 799, 810, 818, 819, 824, 838, 839, 844, 848, 854, 855, 863, 874, 899, 908, 911, 914, 918, 934, 936, 938, 943, 954, 963, 964, 990, 991, 998, 999, 1008, 1019, 1026, 1028, 1034, 1039, 1043, \dots\}$

Числовые ряды параметра k для $B > 0$ и $B < 0$, а также алгоритм их получения, представлены авторами в Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей «OEIS» на страницах [12] и [13] соответственно.

5. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПАРАМЕТРА k

Для выявления свойств приведенных выше последовательностей параметра k нами проанализированы некоторые визуальные представления этих рядов.

Для оценки плотности следования этих чисел проиллюстрируем графически зависимость члена ряда от его номера $k(i)$ для случаев $B > 0$, $B < 0$. Эти зависимости, а также зависимости последовательных приращений, представлены на рисунке 6. В обоих случаях зависимости хорошо аппроксимируются линейной функцией, тренды, определенные методом наименьших квадратов, имеют вид: $k = 38,70i - 85,96$ в случае $B > 0$ при длине ряда $N = 86$ и $k = 6,62i - 25,15$ для $B < 0$ при $N = 160$. Обращает на себя внимание, что в обоих случаях заполнение области определения близко к однородному. Кроме того, видно, что при $B < 0$ флуктуации в последовательности менее выражены.

Для наглядного представления макроструктуры рядов параметра k члены последовательностей были также изображены на особых плоскостях, которые используются в теории чисел — скатерти Улама и спирали Сакса (рисунок 7 для $B > 0$ и рисунок 8 для $B < 0$).

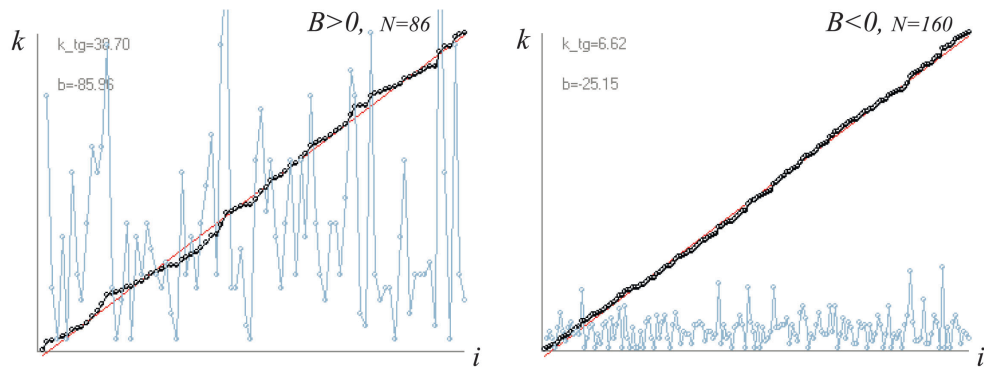


Рис. 6. Аппроксимация линейной зависимостью с помощью метода наименьших квадратов для рядов $k(i)$ в случаях $B > 0$, $B < 0$

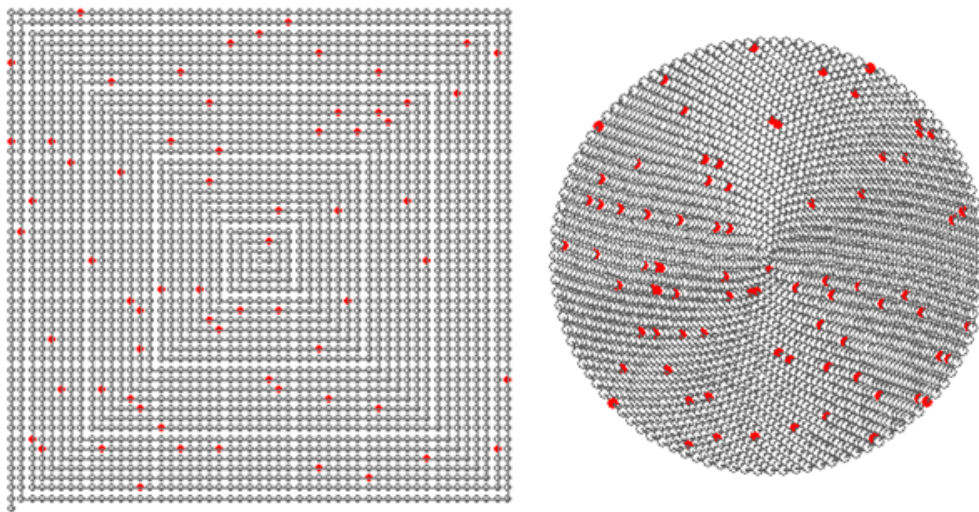


Рис. 7. Скатерть Улама и спираль Сакса при $B > 0$ для первых $N = 86$ членов ряда

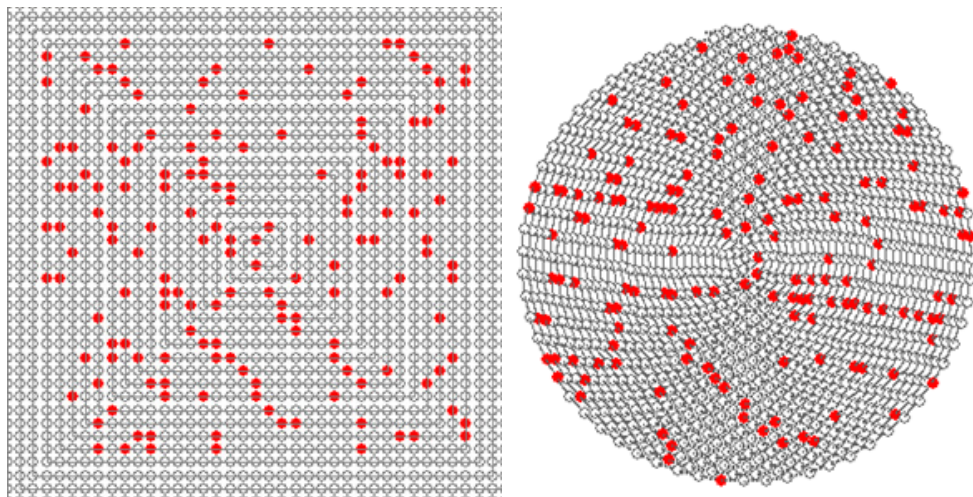


Рис. 8. Скатерть Улама и спираль Сакса в случае $B < 0$ для первых $N = 160$ членов ряда

Как видно из рисунка 8, некоторые члены последовательности при $B < 0$ образуют на скатерти Улама диагональные прямые. Для $B > 0$ такие структуры выражены слабее.

На спиралях Сакса также можно заметить, что распределения точек в этом пространстве нельзя назвать однородным, многие из них объединены в линейные кластеры (лучи). Исследование закономерностей расположения рядов параметра k на скатерти Улама и спирали Сакса может являться отдельной самостоятельной задачей.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы оформлены в виде теорем 1–3. Предложенный алгоритм (метод) решения рассматриваемого параметрического диофантова уравнения позволяет не только решить его при конкретных значениях параметров, но и исследовать на разрешимость некоторые уравнения данного класса в общем виде.

В частном случае уравнений специального вида выявлены последовательности натуральных чисел-параметров уравнения, при которых оно тотально неразрешимо. Детальное описание программного кода представлено в международном математическом ресурсе [12, 13].

Стоит отметить перспективы использования данного метода. В частности, похожие рассуждения можно применять для нахождения оптимального алгоритма решения близких по структуре диофантовых уравнений второй степени, решение которых традиционным способом (сведением к параметрическому уравнению Пелля) является более громоздким.

Кроме того, предложен метод с элементами численных расчетов для решений диофантовых уравнений второго порядка. Метод можно использовать как тест на производительность компьютера. Создание оптимального кода программы, требующей для решения таких уравнений наименьший объем ресурсов компьютера и выдающей результат с максимально возможной скоростью, может стать самостоятельной полезной задачей.

Авторы сообщают об отсутствии конфликтов интересов.

Список литературы

1. Осипов Н. Н., Кытманов А. А. Алгоритм для решения семейства диофантовых уравнений четвертой степени, удовлетворяющих условию Рунге // Программирование. 2021. № 1. С. 39–44.
2. Осипов Н. Н. Метод Рунге для уравнений 4-й степени: элементарный подход // Матем. просв. 2015. Вып. 19. С. 178–198.
3. Osipov N. N., Gulnova B. V. An Algorithmic Implementation of Runge's Method for Cubic Diophantine Equations // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2018. Vol. 11(2). P. 137–147. doi:10.17516/1997-1397-2018-11-2-137-147
4. Спринджук В. Г. Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных. М.: Наука, 1982.
5. Masser D. W. Auxiliary Polynomials in Number Theory. Cambridge University Press, 2016.
6. Бугаенко В. О. Уравнения Пелля. М.: МЦНМО, 2001. 32 с.
7. Осипов Н. Н., Гульнова Б. В. Программный модуль для решения кубических диофантовых уравнений, удовлетворяющих условию Рунге. Государственная регистрация программы для ЭВМ. Номер регистрации (свидетельства): 2016663115. 2016
8. Andreescu T., Andrica D. Quadratic diophantine equations. New York: Springer, 2015.
9. Боревиц З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 504 с.
10. Башмакова И. Г., Славутин Е. И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. М.: Наука, 1984.

11. Спивак А. Уравнения Пелля // Квант. 2002. № 4. С. 5–11.
12. Orlov N., Osipov N. Positive integers k such that the parametric Pell-type equation $x^2 - mxy + y^2 = -m^2 - k$ has no integer solutions (x, y) for all integers $m \geq 1$, excluding the cases $k \equiv 1 \pmod{4}$, $k \equiv 3 \pmod{9}$, and $k \equiv 6 \pmod{9}$ [Электронный ресурс]. 2024. URL: <https://oeis.org/A371957> (дата обращения: 22.12.2024).
13. Orlov N., Osipov N. Positive integers $k \equiv 2 \pmod{4}$ such that the parametric Pell-type equation $x^2 - mxy + y^2 = m^2 + k$ has no integer solutions (x, y) for all integer $m \geq 1$ [Электронный ресурс]. 2024. URL: <https://oeis.org/A370721> (дата обращения: 22.12.2024).

Поступила в редакцию 08.12.2024, окончательный вариант — 22.12.2024.

Осипов Николай Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики и анализа данных Сибирского федерального университета, Красноярск, ✉ nosipov@sfu-kras.ru

Орлов Никита Витальевич, студент механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, nikita.orlov@math.msu.ru

Орлова Ирина Николаевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики, технологии и методики обучения Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева, Красноярск, orlhome@rambler.ru

Computer tools in education, 2024

№ 4: 7–23

<http://cte.eltech.ru>

[doi:10.32603/2071-2340-2024-4-7-23](https://doi.org/10.32603/2071-2340-2024-4-7-23)

On the Solvability and Special Solutions of Parametric Pell Equations

Osipov N. N.¹, Doctor sc., Professor, ✉ nosipov@sfu-kras.ru, orcid.org/0000-0002-8894-609X

Orlov N. V.², Student, nikita.orlov@math.msu.ru

Orlova I. N.³, Cand. sc., Associate Professor, orlhome@rambler.ru,

orcid.org/0000-0002-8638-3879

¹Siberian Federal University, 79 Svobodny pr., 660041, Krasnoyarsk, Russian Federation

²Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, 119991, Moscow, Russian Federation

³KSPU named after V. P. Astafyev, 82 Ady Lebedevoy str., 660049, Krasnoyarsk, Russian Federation

Abstract

The paper investigates a family of solutions of second-order parametric Pell equations of the general form: $x^2 - mxy + y^2 = B$, where m and B are some parameters. An optimal algorithm for solving such equations is found as an alternative to the traditional method. The proposed method allows not only to solve equations of this type for specific values of the parameters m and B , but also to investigate some equations of this class for solvability as a whole. In the particular case of equations of a special type, sequences of natural numbers are identified — the parameters of the equation, for which it is totally unsolvable.

Keywords: *Diophantine equations, Pell's equation.*

Citation: N. N. Osipov, N. V. Orlov, and I. N. Orlova, "On the Solvability and Special Solutions of Parametric Pell Equations," *Computer tools in education*, no. 4, pp. 7–23, 2024 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2024-4-7-23

References

1. N. N. Osipov and A. A. Kytmanov, "Algorithm for solving a family of fourth-degree Diophantine equations satisfying the Runge condition," *Programming*, no. 1, pp. 39–44, 2021 (in Russian).
2. N. N. Osipov, "Runge's method for fourth-degree equations: elementary approach," *Matem. prosv.*, no. 19, pp. 178–198, 2015 (in Russian).
3. N. N. Osipov and B. V. Gulnova, "An Algorithmic Implementation of Runge's Method for Cubic Diophantine Equations," *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, vol. 11(2), pp. 137–147, 2018 (in Russian); doi:10.17516/1997-1397-2018-11-2-137-147
4. V. G. Sprindzhuk, *Classical Diophantine equations in two unknowns*, Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
5. D. W. Masser, *Auxiliary Polynomials in Number Theory*, Cambridge, England: Cambridge University Press, 2016.
6. V. O. Bugaenko, *Pell's equations*, Moscow: MCCME publ., 2001 (in Russian).
7. N. N. Osipov and B. V. Gulnova, "Software module for solving cubic Diophantine equations satisfying the Runge condition," *State registration of the computer program (Registration number (certificate): 2016663115)*, 2016.
8. T. Andreescu and D. Andrica, *Quadratic diophantine equations*, New York: Springer, 2015.
9. Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number Theory*, 3rd ed., Moscow: Nauka, 1985 (in Russian).
10. I. G. Bashmakova and E. I. Slavutin, *History of Diophantine Analysis from Diophantus to Fermat*, Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
11. A. Spivak, "Pell's Equations," *Quantum*, no. 4, pp. 5–11, 2002 (in Russian).
12. N. Orlov and N. Osipov, "Positive integers k such that the parametric Pell-type equation $x^2 - mxy + y^2 = -m^2 - k$ has no integer solutions (x, y) for all integers $m \geq 1$, excluding the cases $k \equiv 1 \pmod{4}$, $k \equiv 3 \pmod{9}$, and $k \equiv 6 \pmod{9}$," in *oeis.org*, 2024. [Online]. Available: <https://oeis.org/A371957>
13. N. Orlov and N. Osipov, "Positive integers $k \equiv 2 \pmod{4}$ such that the parametric Pell-type equation $x^2 - mxy + y^2 = m^2 + k$ has no integer solutions (x, y) for all integer $m \geq 1$," in *oeis.org*, 2024. [Online]. Available: <https://oeis.org/A370721>

Received 08-12-2024, the final version — 22-12-2024.

Nikolai Osipov, Professor of the Department of Applied Mathematics and Data Analysis of the Siberian Federal University, Krasnoyarsk, ✉ nosipov@sfu-kras.ru

Nikita Orlov, Student of the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Lomonosov Moscow State University, Moscow, nikita.orlov@math.msu.ru

Irina Orlova, Associate Professor of the Department of Physics, Technology and Teaching Methods of the Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V. P. Astafyev, Krasnoyarsk, orlhome@rambler.ru